

Fractions : Additions et soustractions. Égalité de fractions

I) Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur

<u>1) La somme</u>	<u>2) La différence</u>
<p>Pour calculer la somme de deux fractions de même dénominateur :</p> <ul style="list-style-type: none">• On additionne les numérateurs• On garde le même dénominateur <p>Pour tout nombre a, b et c ($c \neq 0$)</p> $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	<p>Pour calculer la différence de deux fractions de même dénominateur :</p> <ul style="list-style-type: none">• On soustrait les numérateurs• On garde le même dénominateur <p>Pour tout nombre a, b et c ($c \neq 0$)</p> $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$
<p>Exemple :</p> $\frac{2}{7} + \frac{11}{7} = \frac{2+11}{7} = \frac{13}{7}$	<p>Exemple :</p> $\frac{12}{13} - \frac{4}{13} = \frac{12-4}{13} = \frac{8}{13}$

II) Additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents

Méthode :

Pour additionner ou soustraire deux écritures fractionnaires qui ont des dénominateurs différents, il faut commencer par les écrire avec le **même dénominateur**.

Exemples :

Exemple 1

Calculer : $A = \frac{5}{4} + \frac{7}{6}$

Méthode 1 :

1) On cherche d'abord un dénominateur commun :

Pour cela on écrit les tables de multiplications des deux dénominateurs :

Table de multiplication de 4 :

$$\begin{aligned} 4 \times 1 &= 4 \\ 4 \times 2 &= 8 \\ 4 \times 3 &= 12 \end{aligned}$$

Table de multiplication de 6 :

$$\begin{aligned} 6 \times 1 &= 6 \\ 6 \times 2 &= 12 \end{aligned}$$

12 est donc le dénominateur commun

2) On écrit les deux fractions avec le même dénominateur :

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12} \qquad \frac{7}{6} = \frac{7 \times 2}{6 \times 2} = \frac{14}{12}$$

3) On effectue le calcul :

$$A = \frac{5}{4} + \frac{7}{6} = \frac{15}{12} + \frac{14}{12} = \frac{29}{12}$$

$$A = \frac{29}{12}$$

Méthode 2 :

1) Décomposons en produit de facteurs premiers des deux nombres afin de trouver un dénominateur commun :

$4 = 2 \times 2$ et $6 = 2 \times 3$ Pour trouver le plus petit dénominateur commun nous allons procéder de la façon suivante :

Prenons tous les facteurs qui figurent dans l'un au moins de ces produits ; s'ils apparaissent plusieurs fois, nous leur attribuons leur plus grand nombre de fois où ils apparaissent, effectuons ensuite le produit :

Dans 4 : 2 apparaît deux fois alors que dans 6 il apparaît une seule fois donc nous allons prendre 2×2 (le plus grand nombre de fois où il apparaît) de plus dans 6 il y a aussi 3 comme facteur premier, donc nous allons aussi le multiplier (puisque nous prenons tous les facteurs), le résultat est donc :

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

Le plus petit dénominateur commun est donc 12

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$$

$$\frac{7}{6} = \frac{7 \times 2}{6 \times 2} = \frac{14}{12}$$

2) On écrit les deux fractions avec le même dénominateur :

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$$

$$\frac{7}{6} = \frac{7 \times 2}{6 \times 2} = \frac{14}{12}$$

3) On effectue le calcul :

$$A = \frac{5}{4} + \frac{7}{6} = \frac{15}{12} + \frac{14}{12} = \frac{29}{12}$$

$$A = \frac{29}{12}$$

Exemple 2 : Calculer $A = \frac{7}{6} + \frac{3}{2}$

a) Il faut d'abord chercher un dénominateur commun :

On remarque que 6 est un multiple de 2 :

$$2 \times 3 = 6$$

$$A = \frac{7}{6} + \frac{3 \times 3}{2 \times 3}$$

b) Ensuite les deux fractions sont écrites avec le même dénominateur :

$$\frac{7}{6} \text{ ne change pas} \quad \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6}$$

c) Maintenant nous pouvons calculer

$$A = \frac{7}{6} + \frac{9}{6}$$

$$A = \frac{16}{6}$$

d) Il ne faut surtout pas oublier de simplifier le résultat

$$A = \frac{2 \times 8}{2 \times 3}$$

$$A = \frac{8}{3}$$

Exemple 3 : Calculer $B = \frac{7}{15} - \frac{9}{5} + \frac{11}{3}$

a) Il faut d'abord chercher un dénominateur commun :

On remarque que 15 est à la fois un multiple de 5 et de 3

$$15 \times 1 = 15$$

$$5 \times 3 = 15$$

$$3 \times 5 = 15$$

b) Ensuite les trois fractions sont écrites avec le même dénominateur :

$$\frac{7}{15} \text{ ne change pas}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{9 \times 3}{5 \times 3} = \frac{27}{15}$$

$$\frac{11}{3} = \frac{11 \times 5}{3 \times 5} = \frac{55}{15}$$

c) Maintenant nous pouvons calculer :

$$C = \frac{7}{15} - \frac{9}{5} + \frac{11}{3} = \frac{7}{15} - \frac{27}{15} + \frac{55}{15} = \frac{35}{15}$$

d) Il ne faut surtout pas oublier de simplifier le résultat :

$$C = \frac{35}{15} = \frac{7 \times 5}{3 \times 5} = \frac{7}{3}$$

$$C = \frac{7}{3}$$

En 5^{ème} nous nous limitons au cas où un dénominateur est multiple de l'autre.

En 4^e tous les cas sont traités.

III) Egalités de fractions

1) Propriété

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si : $a \times d = c \times b$ et réciproquement

si : $a \times d = c \times b$ alors les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales

Exemples :

Les fractions $\frac{5}{12}$ et $\frac{55}{132}$ sont-elles égales ? $5 \times 132 = 660$ et $55 \times 12 = 660$ donc $\frac{5}{12} = \frac{55}{132}$

Les fractions $\frac{7}{6}$ et $\frac{6}{8}$ sont-elles égales ? $6 \times 6 = 36$ et $7 \times 8 = 56$ donc $\frac{7}{6} \neq \frac{6}{8}$

2) Applications

a) Simplifier une fraction

Définition

Simplifier une fraction veut dire trouver une fraction égale dont le numérateur et le dénominateur sont les plus petits possibles.

Lorsqu'une fraction ne peut pas être simplifiée, on dit qu'elle est irréductible.

Exemples

Exemple 1 : Simplifier la fraction : $\frac{63}{72}$

$$\frac{63}{72} = \frac{3 \times 3 \times 7}{3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{7}{8}$$

On décompose le numérateur et le dénominateur en **produit de facteurs premiers**

$$\frac{124}{48} = \frac{2 \times 2 \times 31}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3} = \frac{31}{12}$$

On simplifie en utilisant la propriété sur les quotients égaux

Remarque : On pense à utiliser les critères de divisibilité

b) Modifier le dénominateur d'une fraction

Nous serons régulièrement amenés à modifier le dénominateur d'une fraction (pour additionner ; soustraire et comparer des fractions)

Exemple : Trouver la fraction égale à $\frac{7}{9}$ dont le dénominateur est 36

Méthode : Comme $9 \times 4 = 36$, on va donc multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction par 4 :

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 4}{9 \times 4} = \frac{28}{36}$$